

Nome:

Cognome:

Matricola:

Regole: Voto minimo di ogni esercizio = 0. Esercizi 1–3: risposta giusta = 2, risposta non data = 0, risposta sbagliata = -1. Esercizi 4–5: punti 0–6.

Esercizio 1 Sia f continua in \mathbb{R} e sia $F(x) := \int_0^x f(t) dt$.

1. Se $f(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, allora F non è limitata. V F
2. Se $F(1) = 4$ e $f(t) \geq 4$ per ogni $t \in [0, 1]$, allora $f(\frac{1}{2}) = 4$. V F
3. Se x_0 è un punto di minimo relativo per F allora $f(x_0) < 0$. V F
4. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$, allora esiste $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(t) \geq 0$ per ogni $t \geq t_0$. V F

Esercizio 2 Sia f continua in $[0, +\infty)$ tale che $\int_0^{+\infty} f(x) dx = 1$ nel senso degli integrali impropri.

1. Esiste $x_0 \geq 0$ tale che $\int_{x_0}^{+\infty} f(x) dx = 1$. V F
2. Esiste $x_0 > 0$ tale che $f(x) \geq \frac{2}{\sqrt{x}}$ per $x \in [x_0, +\infty)$. V F
3. La funzione $g(x) = |f(x) + 1|$ è limitata. V F
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\sqrt{n}}^n f(x) dx = 0$. V F

Esercizio 3 Sia $f \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione 1-periodica non costante.

1. Esiste finito $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. V F
2. Se $\int_0^1 f(x) dx = 1$, allora ogni primitiva di f è periodica. V F
3. $f - 1$ è Lipschitziana. V F
4. $f' + f$ è periodica. V F

Esercizio 4 Sia

$$f(x) = -x + 2 - \frac{3}{2 + \frac{|x|}{3}}.$$

Si determinino

1. il dominio, gli intervalli di continuità
2. gli intervalli di crescita e decrescenza
3. gli intervalli di concavità, convessità e eventuali asintoti

Esercizio 5 1. Determinare lo sviluppo di Taylor di $f(x) = \cos(3 \sin(x - 4))$ al secondo ordine centrato in $x_0 = 4$;

2. Determinare lo sviluppo di Taylor di $f(x) = \sqrt{2(x - 4)^2 + 6}$ al secondo ordine centrato in $x_0 = 4$;

3. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cos(3 \sin(x - 4)) - 1}{\sqrt{2(x - 4)^2 + 6} - \sqrt{6}} e^{(x-4)^2}$$